1. Алгебра матриц и элементы линейной алгебры
1.1. Матрицы и действия над ними
1.1.1. Понятие матрицы

Матрицей размера **m × n** называется прямоугольная таблица, составленная из чисел и содержащая **m** строк и **n** столбцов. Элементы матрицы обозначаются через $\mathbf{a_{ij}}$, где **i** – номер строки, а **j** – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент. Элементы матрицы заключают в круглые скобки, либо в сдвоенные вертикальные линии,. Например:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 9\\ 2 & -1 & 0\\ 11 & 6 & -4\end{pmatrix} \qquad A=\begin{Vmatrix}1 & 7 & 9\\ 2 & -1 & 0\\ 11 & 6 & -4\end{Vmatrix}$$

Числа, из которых состоит матрица, называются элементами матрицы. В общем виде матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Если число строк матрицы не равно числу ее столбцов, т.е. $m \neq n$, то матрица называется прямоугольной.

Если число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, т.е. m=n, то матрица называется квадратной. Число строк (или столбцов) квадратной матрицы определяют её порядок. Говорят, что матрица A n-ого порядка.

Две матрицы A и B, имеющие одинаковое количество строк и столбцов, называются матрицами одинакового типа. Две матрицы одинакового типа называются равными, если $a_{ij} = b_{ij}$ при всех i и j.

Элементы квадратной матрицы порядка n, имеющие одинаковые значения индексов a_{ii}, где i=1,2,...,n составляют главную диагональ, а элементы квадратной матрицы,сумма индексов каждого из которых равна n+1, – побочную диагональ.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{3n}\end{pmatrix}$$

Побочная диагональ ← → Главная диагональ

Квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, а все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется единичной (обозначается E):

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой диагонали равны единице, а все элементы вне главной диагонали, (обозначается O):

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Матрица, состоящая из одного столбца, называется матрицей-столбцом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Преобразование элементов матрицы A($m \times n$), состоящее в замене строк соответствующими столбцами, называется транспонированием матрицы. Матрица, транспонированная по отношению к матрице *A,* обозначается A^{T}. Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{32} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1.2. Действия над матрицами

Основные операции, которые производятся над матрицами, – сложение, вычитание, умножение матрицы на число, а также умножение. Указанные операции являются основными операциями алгебры матриц – теории, играющей весьма важную роль в различных разделах математики и естествознания.

1. Сложение. Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера $C = A + B$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, если

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+ b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+ b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Проверкой можно убедиться, что операция сложения матриц удовлетворяет следующим свойствам:

A + B = B + A; (коммутативность, переместительное свойство)

A + (B + C) = (A + B) + C; (ассоциативность, сочетательное свойство)

Здесь A, B, C – произвольные матрицы одинаковых размеров.

2. Вычитание. Разностью двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера $C = A - B$, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число λ ($\lambda \neq 0$)называется матрица, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на число λ: $c_{ij} = a_{ij}\,\lambda$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} \dots \lambda a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda a_{m1} \dots \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица $-A = (-1)A$ называется противоположной матрице A. Проверкой можно убедиться, что операция умножения матрицы на число удовлетворяет следующим свойствам:

$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

$\lambda(A + B) = \lambda A+ \lambda B$;

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Здесь A, B – произвольные матрицы; μ, λ - произвольные числа.

4. Умножение матриц. Произведение AB матрицы A на матрицу B определяется только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Пусть даны матрицы **A(*m*× *n*)** и **B(*n* ×*p*)**. Произведением матрицы A на матрицу B , называется матрица **C(*m*×*p*)** элементы которой вычисляют по следующему правилу:
чтобы получить элемент c_{ij} матрицы произведения **C=AB** нужно найти сумму произведений элементов *i*-ой строки матрицы A на соответствующие элементы *j*-ого столбца матрицы B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, p)$$

Например, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 3\cdot 11 & 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 12 \\ 4\cdot 7 + 5\cdot 9 + 6\cdot 11 & 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц некоммутативно, т.е. AB ≠ BA. Убедимся на матрицах из предыдущего примера. Перемножив их в обратном порядке, получим:

$$BA = \begin{pmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 49 & 68 & 87 \\ 59 & 82 & 105 \end{pmatrix}$$

Исключение составляет единичная матрица: AE = EA. Значит в общем случае нельзя менять сомножители, не изменив их произведения.

Проверкой можно показать, что умножение матриц удовлетворяет следующим свойствам:

A(BC) = (AB)C; (ассоциативность)

$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

A(B + C) = AB + AC. (дистрибутивность)

Здесь A, B, C – матрицы размеров, соответствующих определению умножения матриц; λ - произвольное число.

Пример. Каждое из трех предприятий производит продукцию двух видов. Количество продукции каждого вида в тоннах за рабочую смену на каждом предприятий задано матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Стоимость одной тонны продукции каждого вида задана матрицей $B = (10 \ \ 15)$. На какую сумму произведет продукции каждое предприятие за рабочую смену?

Решение: Результат можно получить, произведя умножение матрицы В на А:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 55 & 90 \end{pmatrix}$$

Значит, первое предприятие произведет продукции на 35 тыс. кр., второе – на 55 тыс. кр., третье – на 90 тыс. кр.

1.2. Определители матрицы
1.2.1. Понятие определителя и вычисление определителей

Прежде всего необходимо отметить, что определители существуют только для матриц квадратного вида. В теории систем линейных уравнений и в некоторых других вопросах удобно использовать понятие **определителя**, или **детерминанта**.

Определитель матрицы есть число, вычисляемое по некоторым правилам, которые рассмотрим ниже. Обозначается определитель

$$d = D = \Delta = \det = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11} и определитель такой матрицы равен этому элементу.

Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Например, вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) = 18 + 8 = 26$$

Определитель третьего порядка можно вычислить по **правилу треугольников** : со знаком плюс берутся произведения трех элементов, образующих главную диагональ и треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком минус берутся произведения трех элементов, образующих побочную диагональ и треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали (Рис.1),

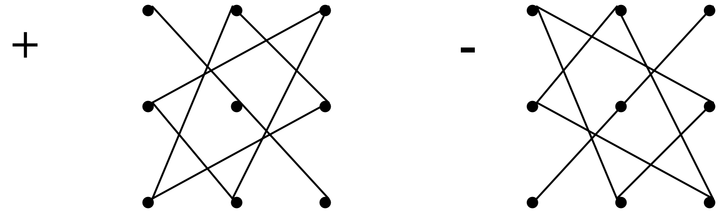

Рис. 2. Правило треугольников

или

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$$

Например, вычислить определитель:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 1 - (4 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 3) = -12 + 40 + 3 - (-8 + 4 + 45) =$$

$$= 31 - 41 = -10$$

1.2.2. Свойства определителей

Определитель обладает некоторыми свойствами, с помощью которых задача их вычисления становится более легкой. Перечислим ряд свойств, которыми обладает произвольный определитель *n*-го порядка:

1. При транспонировании матрицы её определитель не изменяется.
2. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя состоят из нулей, то определитель равен нулю.
3. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (столбца), равен нулю.
5. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю.
6. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на одно и тоже число $k \neq 0$, то определитель умножается на это число, т.е. общий множитель всех элементов некоторой строки (столбца) определителя можно вынести за знак определителя.
7. Определитель не изменяется, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число.

1.2.3. Минор. Алгебраическое дополнение.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-ого порядка называется определитель *n –1* –ого порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i-ой строки и j-ого столбца, т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.
Например, вычислить минор для элементов a_{13}и a_{23} определителя

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 2 = 12 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя *n*-ого порядка называется определитель *n* –1 -ого порядка, вычисляемый по формуле:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

т.е. если сумма индексов i+j четная, то алгебраическое дополнение равно минору, если нечетная – то минору с противоположным знаком.

В приведенном выше примере

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 2 = 12 \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

1.2.4. Вычисление определителей любого порядка

Метод разложения по элементам строки или столбца основан на применении следующей теоремы.

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} =$$

$$= a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj};$$

где *i*=1,2,,…*n*; *j*= 1,2,…*n*.

Например, вычислим определитель, разложив по элементам первой строки:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot 14 + 4 \cdot 12 = -16 - 42 + 48 = -10$$

Вычисление определителей методом понижения вытекает из следствия рассмотренной выше теоремы.

Следствие теоремы. Если элементы i-ой строки (столбца) определителя, кроме одного a_{ij} равны нулю, то определитель равен произведению данного элнмента на его алгебраическое дополнение:

$d = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

Для использования данного следствия необходимо произвести в определителе элементарные преобразования, основанные на седьмом свойстве определителей.

Например, вычислим определитель методом понижения:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -12 & -14 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -12 & -14 \end{vmatrix} = 14 - 24 = -10$$

1.3. Обратная матрица

Для того,чтобы квадратная матрица **A** имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля, т.е. чтобы матрица была **A** неособенной.

Квадратная матрица называется **обратной** по отношению к данной, если ее умножение как справа, так и слева на данную матрицу дает единичную матрицу. Для матрицы **A** обратная обозначается $\mathbf{A^{-1}}$. По определению,

$$\mathbf{A\,A^{-1} = A^{-1}A = E}$$

Нахождение обратной матрицы называется обращением данной матрицы.
Рассмотрим процесс обращения матрицы **A.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

1. Находим значение определителя матрицы.
2. Составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов данной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

3. Транспонируем матрицу алгебраических дополнений. Полученная матрица называется **союзной** или **присоединенной**.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

4. Вычисляем элементы обратной матрицы по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} \cdot \widetilde{A}$$

Пример. Найти матрицу обратную матрице А

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Проверим, обратима матрица A или нет, т.е. является ли она невырожденной. Для этого вычислим значение определителя:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0 \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-10$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=5$$

Составим присоединённую матрицу для матрицы A:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ -1 & -7 & -10\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Отсюда находим обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ -1 & -7 & -10\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & -5 & -5\\ 1 & 7 & 10\\ 1 & -3 & -5\end{pmatrix}$$

1.4. Матричные уравнения

Рассмотрим два вида матричных уравнений:

AX=B

XA=B, где

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix} -$$

заданные квадратные матрицы одного и того же размера, а

$$X=\begin{pmatrix}x_{11} & \dots & x_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ x_{n1} & \dots & x_{nn}\end{pmatrix} -$$

квадратная матрица того же размера, элементы которой являются неизвестными.

Выведем решение матричного уравнения вида AX=B. Для этого умножим слева обе его части на A^{-1}:

$$A^{-1}AX= A^{-1}B.$$

Но произведение $A^{-1}A=E$; следовательно, $EX= A^{-1}B$, откуда $X= A^{-1}B$.

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим определитель матрицы A:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы *A*:

$A_{11}= 2$ $\qquad$ $A_{21}= -3$

$A_{12}= -1$ $\qquad$ $A_{22}= 2$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим значения матрицы неизвестных:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Для решения уравнение XA=B умножим справа обе его части на A^{-1}:
X A A^{-1}= B A^{-1}.
Т.к. произведение $A^{-1}A=E$; следовательно, XE= B A^{-1}, откуда X= B A^{-1}.

Пример. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы А:

$$d = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы *A*:

$A_{11}= -2$ $\qquad$ $A_{21}= -2$

$A_{12}= -3$ $\qquad$ $A_{22}= -1$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислим значения матрицы неизвестных:

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. 5. Системы линейных уравнений

В общем виде система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где x_1, x_2, …, x_n – неизвестные системы, значения которых подлежат нахождению. Как видно из структуры системы, в общем случае число неизвестных не обязательно должно быть равно числу уравнений самой системы. Числа a_{11}, a_{12}, … , a_{mn} называются коэффициентами системы, а b_1, b_2, … , b_m - её свободными членами. Для удобства коэффициенты системы a_{ij} ($i = 1, 2, . . ., m$; $j = 1, 2, . . .,n$) и свободные члены bi ($i=1, 2, . . .,m$) снабжены индексами. Первый индекс коэффициентов a_{ij} соответствует номеру уравнения, а второй индекс – номеру неизвестной x_i, при которой коэффициент поставлен. Индекс свободного члена b_i соответствует номеру уравнения, в которое входит b_i.

Дадим определения некоторых понятий, необходимых при изучении системы уравнений. Решением системы уравнений называется всякая совокупность чисел α_1, α_2, α_n, которая будучи поставлена в систему на место неизвестных x1, x2, …, x_n, обращает все уравнения системы в тождества.

Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если не имеет решений. Совместная система уравнений называется определенной, если она имеет одно единственное решение, и неопределенной, если она имеет по крайней мере два различных решения.

Две системы уравнений называются равносильными или эквивалентными, если они имеют одно и тоже множество решений.

Система, в которой свободные члены b_1, b_2, … , b_m , равны нулю, называется однородной.

Над уравнениями системы можно выполнять следующие элементарные преобразования:

1. менять местами уравнения системы;
2. умножать обе части уравнения на любое отличное от нуля число;
3. прибавлять (вычитать) к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое не равное нулю число.

Рассмотрим методы решения систем линейных уравнений, в которых число неизвестных равно числу уравнений.

1. 5. 1. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

В общем виде система n линейных уравнений с n неизвестными имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = b_n \end{cases}$$

В данной системе можно выделить матрицу коэффициентов при неизвестных A, матрицу-столбец свободных членов B и матрицу-столбец неизвестных величин X:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде следующим образом: $AX=B$. Решение данного уравнения было выведено ранее и равно $X= A^{-1}B$.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Запишем систему линейных уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix},$$

значит x_1=0,5; x_2=2; x_3=1,5.

1. 5. 2. Метод Крамера

По формулам Крамера решаются только неоднородные системы, т.е. системы у которых все свободные члены отличны от нуля.

Определителем системы называется определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных системы.

Метод Крамера основан на следующей теореме.

Теорема. Если определитель системы отличен от нуля, то система всегда совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}; \qquad x_2 = \frac{d_2}{d}; \qquad \dots \qquad ; x_n = \frac{d_n}{d},$$ где

d – определитель системы;

$d_1, \ \dots, \ d_n$ – дополнительные определители.

Дополнительный определитель d_i получают заменой в определителе системы i –ого столбца столбцом свободных членов.

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; d_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots\ d_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Например, решим систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Вычислим определитель системы:

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=10\neq 0$$

Затем рассчитаем дополнительные определители.

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=5;\quad d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=20;\quad d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=15$$

Откуда $x_1=\dfrac{d_1}{d}=\dfrac{5}{10}=0,5$; $x_2=\dfrac{d_2}{d}=\dfrac{20}{10}=2$ и $x_3=\dfrac{d_3}{d}=\dfrac{15}{10}=1,5$.

1.5. 3. Метод Гаусса

Рассмотрим метод Гаусса для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Сформируем расширенную матрицу в левой части которой коэффициенты при неизвестных системы, а в правой – матрица свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)\sim\dots\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \end{array}\right)$$

Посредством элементарных преобразований в левой части расширенной матрицы необходимо получить единичную. Значит, $x_1=\alpha_1$; $x_2=\alpha_2$; ... $x_n=\alpha_n$.

Решим систему линейных уравнений из предыдущего пункта методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу и выполняем элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5 \end{array}\right)$$

Отсюда $x_1=0,5$; $x_2=2$; $x_3=1,5$.

2. Экономико-математическое моделирование
2.1. Основные понятия моделирования и модели

Важнейшим видом формализованного знакового моделирования является математического моделирование, осуществляемое средствами языка математики и логики. Для изучения какого-либо класса явлений внешнего мира строится его математическая модель, т.е. приближенное описание этого класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

Сам процесс математического моделирования можно подразделить на четыре основных этапа:

I этап: Формулирование законов, связывающих основные объекты модели, т.е. запись в виде математических терминов сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

II этап: Исследование математических задач, к которым приводят математические модели.

Основной вопрос - решение прямой задачи, т.е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретических следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений.

III этап: Корректировка принятой гипотетической модели согласно критерию практики, т.е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений.

Если модель была вполне определена - все параметры ее были даны, - то определение уклонений теоретических следствий от наблюдений дает решения прямой задачи с последующей оценкой уклонений.

Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели некоторые ее характеристики остаются не определенными.

Применение критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели.

IV этап: Последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изученных явлениях и модернизация модели.

С появлением ЭВМ метод математического моделирования занял ведущее место среди других методов исследования. Особенно важную роль этот метод играет в современной экономической науке. Изучение и прогнозирование какого-либо экономического явления методом математического моделирования позволяет проектировать новые технические средства, прогнозировать воздействие на данное явление тех или иных факторов, планировать эти явления даже при существовании нестабильной экономической ситуации. Экономические модели, исходя из общего процесса математического моделирования, строятся согласно схеме, приведенной на рисунке 1.

Математические методы, основанные на математическом моделировании, все шире применяются в промышленно-экономических исследованиях, в частности, в операционных исследованиях.

Операционные исследования являются методом выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию управленческих решений. Описание всякой задачи операционных исследований включает в себя задание факторов решения, которые являются численными переменными, налагаемых на них ограничений (отражающих ограниченность ресурсов) и системы целей.

Всякая система факторов решения, удовлетворяющих всем ограничениям, называется допустимым решением. Каждой из целей соответствует целевая функция, заданная на множестве допустимых решений, значения которых выражают меру осуществления цели.

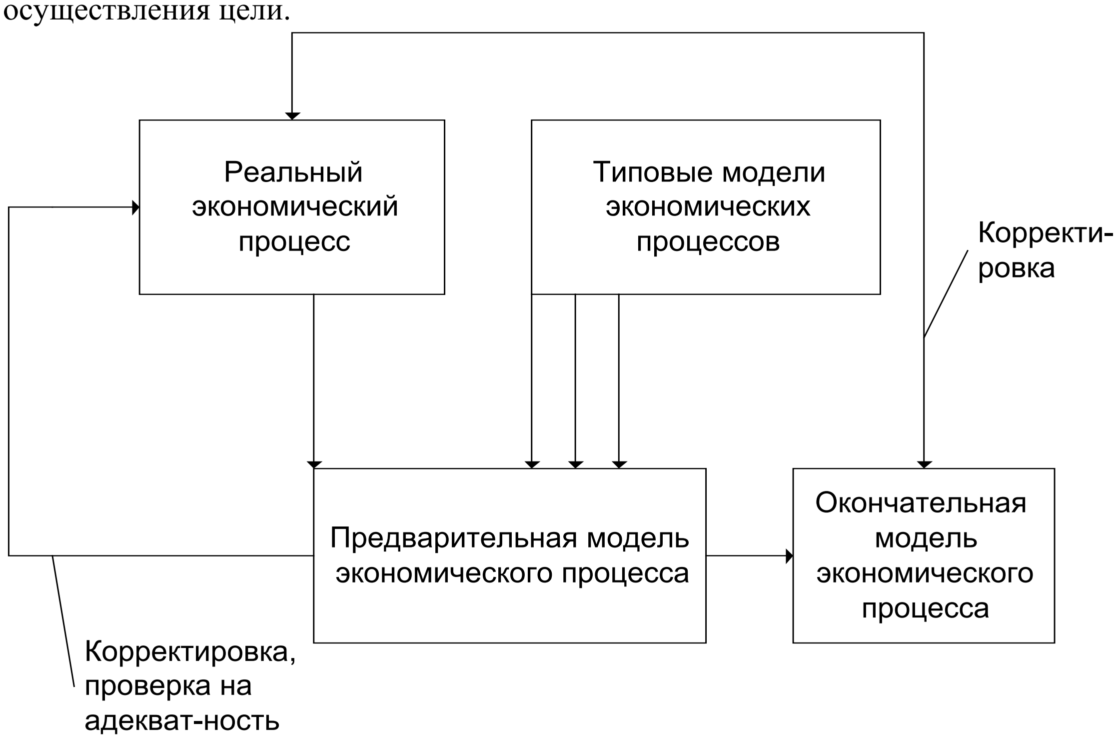

Рис.1. Схема построения математической модели

Сущность задачи операционных исследований состоит в нахождении наиболее целесообразных, оптимальных решений. Поэтому задачи операционных исследований обычно называются оптимизационными.

2.2.Линейное программирование

Термин линейное программирование появился в Америке в середине 40-х годов (первая американская работа по частной задаче линейного программирования опубликована в 1941 г.). В Советском Союзе исследования в этой области начались ранее. В конце 30-х годов целый ряд существенных результатов по линейному программированию был установлен Л.В. Канторовичем.

Задача линейного программирования – это задача нахождения значений параметров, обеспечивающих экстремум функции при наличии ограничений на аргументы.

Задачи линейного программирования являются самыми простыми и лучше изученными задачами. Для них характерно: показатель эффективности (целевая функция) выражается линейной зависимостью; ограничения на решения – линейные равенства или неравенства.

Трудности решения задач линейного программирования зависят от: вида зависимости, связывающей целевую функцию с элементами решения; размерности задачи, то есть от количества неизвестных $x_1, x_2,\ldots, x_n$; вида и количества ограничений на элементы решений.

Методы линейного программирования применяются для решения многих экстремальных задач, с которыми довольно часто приходится иметь дело в экономике. Решение таких задач сводится к нахождению крайних значений (максимума и минимума) некоторых функций еременных величин.

Линейное программирование основано на решении системы линейных уравнений (с преобразованием в уравнения и неравенства), когда зависимость между изучаемыми явлениями строго функциональна. Для него характерны математическое выражение переменных величин, определенный порядок, последовательность расчетов (алгоритм), логический анализ. Применять его можно только в тех случаях, когда изучаемые переменные величины и факторы имеют математическую определенность, когда в результате известной последовательности расчетов происходит взаимозаменяемость факторов, когда логика в расчетах, математическая логика совмещаются с логически обоснованным пониманием сущности изучаемого явления.

С помощью этого метода в промышленном производстве, например,
исчисляется оптимальная общая производительность машин, агрегатов, поточных линий (при заданном ассортименте продукции и иных заданных величин) решается задача рационального раскроя материалов (с оптимальным выходом заготовок). В сельском хозяйстве он используется для определения минимальной стоимости кормовых рационов при заданном количестве кормов (по видам и содержащимся в них питательным веществам). Задача о смесях может найти применение и в литейном производстве (состав металлургической шихты). Этим же методом решаются транспортная задача, задача рационального прикрепления предприятий-потребителей к предприятиям-производителям.

Все экономические задачи, решаемые с применением линейного программирования, отличаются альтернативностью решения и определенными ограничивающими условиями. Решить такую задачу — значит из всех допустимо возможных (альтернативных) вариантов найти лучший, оптимальный. Важность и ценность использования в экономике метода линейного программирования состоят в том, что оптимальный вариант выбирается из весьма значительного количества альтернативных вариантов. При помощи других способов решать такие задачи практически невозможно.

2.3. Основная задача линейного программирования

Любая задача линейного программирования состоит из следующих частей.

1. Целевая функция:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n \ (\max)$$

2. Система ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+ \dots +a_{3n}x_n \le b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \dots +a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

3. Условие неотрицательности:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \dots ,x_n \ge 0$$

Совокупность неотрицательных значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих условиям в системе ограничений называется допустимым решением. Допустимое решение называется оптимальным, если при нем целевая функция принимает свое максимальное значение.

Стандартной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения целевой функции при выполнении условий вида «меньше или равно» в системе ограничений.

Канонической (основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения целевой функции при выполнении условий вида «равно» в системе ограничений.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно уметь сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации и переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам.

Задачу минимизации можно свести к задаче максимизации, умножая целевую функци на «-1»:

$F=c_1x_1+c_2x_2+ ... +c_nx_n$ (min)

$Z= - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$ (max), т.е. $Z_{max}= - F_{min}$.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид «≤», можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида «≥» - в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \ldots +a_{1n}x_n \le b_1$

преобразуется в ограничение-равенство

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \ldots +a_{1n}x_n +x_{n+1} = b_1$ $(x_{n+1} \ge 0)$,

а ограничение-неравенство

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \ldots +a_{1n}x_n \ge b_1$

- в ограничение-равенство

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \ldots +a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$ $(x_{n+1} \ge 0)$.

Пример. Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используют три вида сырья: S1, S2, S3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукци, а так же величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1	20	2	5
S2	40	8	5
S3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, кр.		50	40

Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Решение.

Обозначим через x_1 количество единиц продукции P1, а через x_2 – количество единиц продукции P2. Тогда, учитывая количество единиц сырья, расходуемое на изготовление продукции, а так же запасы сырья, получим систему ограничений:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 &\le 20 \\
8x_1 + 5x_2 &\le 40 \\
5x_1 + 6x_2 &\le 30
\end{aligned}
$$

которая показывает, что количество сырья, расходуемое на изготовление продукции, не может превысит имеющихся запасов. Если продукция P1 не выпускается, то $x_1=0$; в противном случае x_1 0. То же самое получаем и для продукции P2. Таким образом, на неизвестные x_1 и x_2 должно быть наложено ограничение неотрицательности: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию двух переменных x_1 и x_2. Реализация x_1 единиц продукции Р1 и x_2 единиц продукции Р2 дает соответственно $50x_1$ и $40x_2$ кр. прибыли, суммарная прибыль $Z = 50x_1 + 40x_2$ (кр.)

Условиями не оговорена неделимость единица продукции, поэтому x_1 и x_2 (план выпуска продукции) могут быть и дробными числами.

Требуется найти такие x_1 и x_2, при которых функция Z достинает максимум, т.е. найти максимальное значение линейной функции Z при ограничениях&

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \ (\max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2.4. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования (ЗЛП) и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного простран6тва, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Множество допустимых решений (многогранник решений) ЗЛП представляет собой выпуклый многогранник (или выпуклую многогранную область). Выпуклая область – это такая область, у которой любая точка отрезка, концы которого лежат на границе области принадлежат этой области. Оптимальное решение задачи находится, по крайней мере, в одной из угловых точек многогранника решений.

Рассмотрим решение задачи стандартной формы с двумя переменными (n=2) грфическим методом, который проходит в два этапа:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2 \ (\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2 \le b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

I. Нахождение области допустимых решений:

1. Строят прямые, уравнения которых получают в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки равенства.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений. Допустимым решением может быть многоугольник (Рис.2), открытый многоугольник (Рис.3) или пустая плоскость (система ограничений несовместима) (Рис.4).

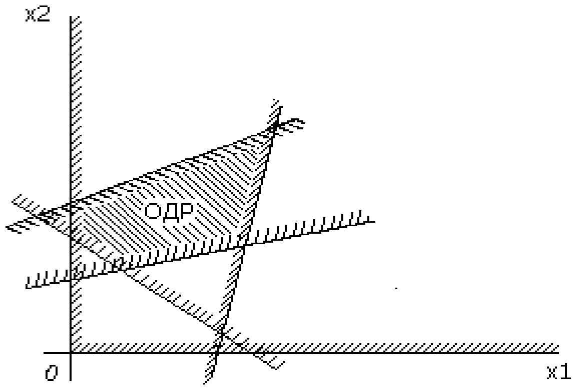

Рис.2 Допустимое решение - многоугольник

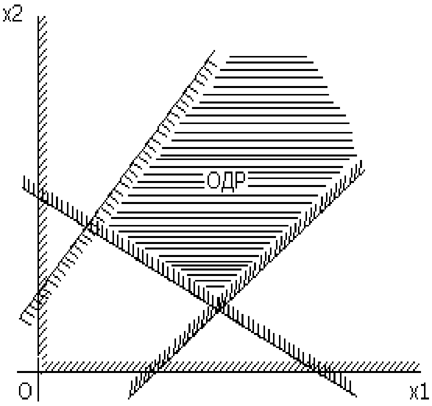

Рис.3 Допустимое решение - открытый многоугольник

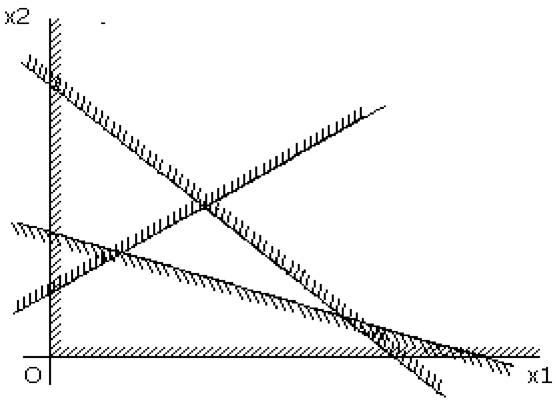

Рис.4 Допустимое решение - пустая плоскость

I. Нахождение оптимального решения:

1. Строят вектор $\vec{C}(c_1;c_2)$, который является нормальным к прямой $Z=c_1x_1+c_2x_2$.

Вектор $\vec{C}$ показывает направление увеличения значения целевой функции.

2.Строят прямую, перпендикулярную вектору $\vec{C}$ и проходящую через начало координат. Эта прямая называется линией уровня и соответствуетет нулевому значению целевой функции.

3. Перемещают линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{C}$ до пересечения с самой крайней точкой области допустимых решений или до самой ближней точки пересечения с областью допустимых решений.

4. Определяют координаты найденной точки и значение целевой функции в данной точке.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации производственной программы цеха, который может выпускать два вида изделий, имея четыре группы производственного оборудования, время использования которого ограничено. Составить математическую модель задачи, которая состоит в том, чтобы найти производственную программу, максимизирующую доход от реализации произведеной продукции, если данные приведены в следующей таблице:

Тип оборудования	Время исп. оборуд. (станко-ч) на обработку одного изделия		Фонд рабочего времени оборудования (ч)
	I изделие	II изделие	
Фрезерное	2	6	18
Токарное	3	3	15
Сварочное	4	0	16
Шлифовальное	1	2	8
Прибыль (кр.)	6	9	

Обозначим через x_1 количество выпускаемых изделий первого вида, а через x_2 – количество выпускаемых изделий второго вида. Тогда, учитывая время использования оборудования каждого вида на обработку одного изделия и фонд рабочего времени оборудования, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Конечная цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли от реализации продукции выражается следующей функцией:

$$Z = 6x_1 + 9x_2 \text{ (max)}$$

Строим прямые, соответствующие каждому из ограничений и находим полуплоскость решений (Рис.5) .

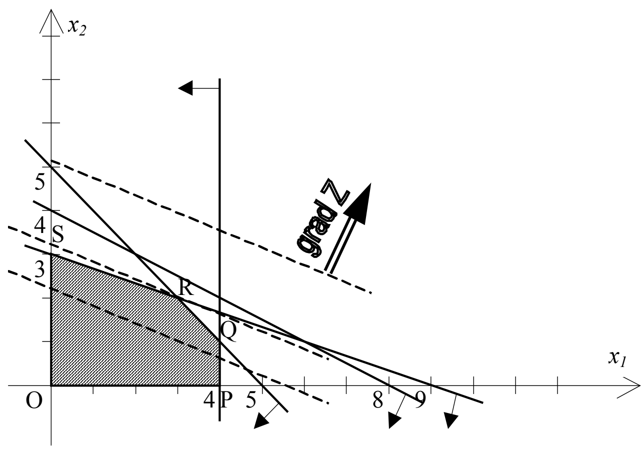

Рис.5 Графический метод решения

Система линейных неравенств определяет выпуклый многоугольник *OPQRS* допустимых решений. Линия уровня функции *Z* перпендикулярны вектору $\vec{C}(6;9)$-на рисунке обозначена *grad*. Наибольшего значения функция *Z* достигает в точке *R*. Координаты этой точки определяют оптимальный план производства $x_1=3,\ x_2=2,$ а максимальная прибыль будет равна 36 условных единиц.

2.4. Двойственная задача линейного программирования

Любой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие некоторую другую задачу линейного программирования, называемую двойственной по отношению к исходной.

Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования, состоящей в нахождении максимального значения функции:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+ \dots +c_nx_n \ (\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+ \dots +a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+ \dots +a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+ \dots +a_{3n}x_n \le b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+ \dots +a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \dots ,x_n\ge 0$$

$$F=b_1y_1+b_2y_2+ \dots +b_my_m \ (\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1+ a_{21}y_2+ \dots + a_{1n}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+ \dots +a_{2n}y_m \ge c_2 \\ a_{13}y_1+a_{23}y_2+ \dots +a_{3n}y_m \ge c_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\, y_1+a_{m2}y_2+ \dots +a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases}$$

$$y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ \dots ,y_m\ge 0$$

Приведенные выше задачи образуют пару задач, называемую в линейном программировании двойственной парой.

Двойственную задачу линейного программирования составляют, руководствуясь следующими правилами:

1. Число переменных исходной задачи равно числу соотношений в системе ограничений двойственной задачи, а число ограничений в системе исходной задачи – числу переменных в двойственной задаче.
2. Целевая функция исходной задачи задается на максимум, а целевая функция двойственной – на минимум.
3. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а свободными членами в системе ограничений двойственной задачи – коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.
4. Матрица **A** коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи транспонируется и образует матрицу коэффициентов при неизвестных в системе ограничений двойственной задачи $\mathbf{A}^{\mathbf{T}}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

5. Если переменная x_j исходной задачи может принимать только лишь положительные значения, то j-ое условие в системе ограничений двойственной задачи является неравенством. Если же переменная x_j может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то j-ое соотношений в системе представляет собой уравнение. Аналогичныесвязи имеют место между ограничениями исходной задачи и переменными двойственной задачи. Если i–ое соотношений в системе исходной задачи является неравенством, то i–ая переменная двойственной задачи должна быть неотрицательна, в противном случае переменная y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Двойственные пары задач подразделяются на симметричные и несимметричные. В симметричной паре двойственных задач ограничения прямой задачи и соотношения двойственной задачи являются неравенствами.

Пример. Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции

$$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \ (max)$$

при условиях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 \le 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 24 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \le 18 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Для данной задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Число переменных двойственной задачи равно числу соотношений в системе ограничений исходной задачи, т.е. равно трем. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, т.е. числа 12, 24, 18.

Целевая функция исходной задачи исследуется на максимум, а все ограничения системы содержит неравенства вида «≤». Поэтому в двойственной задаче целевая функция исследуется на минимум, а все ее переменные должны быть неотрицательны.Так как все три переменные исходной задачи принимают только неотрицательные значения, то в системе условий двойственной задачи должны быть три неравенства вида «≥». Следовательно, для нашей задачи двойственная такова: найти минимум функции

$F = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3$ (min) при условиях

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \ge 1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \ge 3 \end{cases}$$

$y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$, $y_3 \ge 0$

Зависимость между решениями прямой и двойственной задачами характеризуется следующей основной теоремой двойственности.

Теорема. Если одна из задач исходная или двойственная имеет оптимальное решение, то и другая задача имеет оптимальное решение, причем значения целевых функцийзадач при их оптимальных планах равны между собой:

$Z_{max} = F_{min}$

2.5. Симплекс-метод

Симплекс-метод решения задач линейного программирования называют методом последовательного решения. Различают простой симплекс-метод и симплекс-метод с искуственным базисом.

Задача, решаемая простым симплекс-методом должна удовлетворять следующим требованиям:

1. Целевая функция задачи на вычисление наибольшего значения.
2. Система ограничений представлена неравенствами вида вида «≤».
3. Свободные члены в системе ограничений должны быть неотрицательны.

Для решения симплекс-методом целевую функцию задачи $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ (max) необходимо записать в эквивалентном виде: $Z - c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n = 0$.

Систему ограничений приводят к канонической форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m. \end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2},\dots, x_{n+m}\ge 0$

Составляется симплекс-таблица, в которую заносят исходное решение:

Базис	Свободный член	x_1	x_2	…	x_n
Z	0	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_n$
x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Алгоритм улучшения допустимого решения заключается в следующем:

I. Проверка оптимальности

Если все элементы первой строки таблицы неотрицательны, то план оптимален, в противном случае его необходимо улучшать.

II. Выбор ведущего столбца

Среди отрицательных элементов первой строки таблицы найти максимальный по абсолютной величине. Столбец, в котором находится этот элемент, будет ведущим.

III. Нахождение ведущей строки

Разделить элементы столбца свободных членов на соответствующие положительные элементы ведущего столбца и найти наименьшее значение из этих отношений:

$$\min_{a_{ik}\ge 0}\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}$$

Строка, соответствующая этому наименьшему частному, будет ведущей строкой.

Если в ведущем столбце нет положительных элементов, то задача не имеет оптимального результата.

Элемент, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки называется ведущим элементом.

IV. Преобразование таблицы

Разделить ведущую строку на ведущий элемент. С помощью вновь полученной ведущей строки в остальных строках ведущего столбца получить нулевые значения.

В преобразованной таблице изменить номера базисных переменных: ведущей строке будет соответствовать номер ведущего столбца.

Этот цикл повторять до тех пор, пока не будет получне оптимальный результат или подтверждение, что задача не имеет оптимального результата.

Пример. Для производства двух видов изделий используются три вида сырья, запасы которого ограничены. Величины запасов приведены в матрице С. Нормы расхода сырья каждого вида на каждое из двух изделий приведены в матрице А , где строки соответствуют виду сырья, а столбцы – виду изделия. Прибыль от реализации изделий указана в матрице Р.

Составить план производства изделий так, чтобы предприятие получило максимальную прибыль от их реализации.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad P=(\ 50\ \ 40\ )$$

Найдем производственную программу, максимизирующую прибыль $L=50x_1+40x_2$.

Затраты ресурсов 1-го вида, 2-го вида и 3-го вида на производственную программу определяются системой ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 20 \\ 8x_1+5x_2 \le 40 \\ 5x_1+6x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для решения задачи целевую функцию запишем в эквивалентном виде $L - 50x_1 - 40x_2 = 0$, систему неравенств при помощи дополнительных неизвестных x_3, x_4, x_5 заменим системой линейных алгебраических уравнений

$$2x_1+5x_2+x_3 = 20$$
$$8x_1+5x_2+x_4 = 40$$
$$5x_1+6x_2+x_5= 30$$

Получаем следующую таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	x_1	x_2
L	0	-50	-40
x_3	20	2	$\boxed{5}$
x_4	40	8	5
x_5	30	5	6
L	160	-34	0
x_2	4	0,4	1
x_4	20	6	0
x_5	6	206	0
L	238,8	0	0
x_2	3,08	0	1
x_4	6,2	0	0
x_1	2,3	1	0

Из таблицы видно, что x_1=2,3; x_2=3,08; L=238,8. Значит, для получения наибольшего дохода в количестве 238,8 ед. Необходимо изготовить 2 изделия первого вида и 3 изделия второго вида, причем второе сырье использовано не полностью и остаток составляет 6,2 ед.

2.6. Транспортная задача

Транспортная задача формулируется следующим образом. Однородный продукт, сосредоточенный в *m* пунктах производства (хранения) в количествах a_1, a_2,..., a_m единиц, необходимо распределить между *n* пунктами потребления, которым необходимо соответственно b_1, b_2,..., b_n единиц. Стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения равна c_{ij} и известна для всех маршрутов. Необходимо составить план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были минимальными.

Обозначим через x_{ij} количество груза, планируемого к перевозке от i-го поставщика j-му потребителю. При наличии баланса производства и потребления $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

математическая модель транспортной задачи будет выглядеть так:
найти план перевозок

$$X=(x_{ij}),\ x_{ij}\geq 0,\ i\in N_m,\ j\in N_n$$

минимизирующий общую стоимость всех перевозок

$$L=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

при условии, что из любого пункта производства вывозится весь продукт

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad , \quad i\in N_m$$

и любому потребителю доставляется необходимое количество груза

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad , \quad j\in N_n$$

Для решения задачи составляется таблица. В клетки таблицы записывается стоимость соответствующих перевозок cij и в них же заносятся значения перевозок xij, удовлетворяющих поставленным ограничениям. Клетки с не нулевыми перевозками называются базисными, а с нулевыми – свободными. В зависимости от соотношения между запасами и заявками транспортная задача называется сбалансированной или несбалансированной.

Сбалансированная ТЗ: $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$

Несбалансированная ТЗ: $\sum_{i=1}^{m}a_i\neq\sum_{j=1}^{n}b_j$

Для сбалансированной ТЗ ограничения принимают вид равенств, то есть получаем m+n ограничений, в которых все переменные линейно зависимы. В результате допустимое решение сбалансированной ТЗ может быть получено, если заполнять клетки транспортной таблицы таким образом, чтобы сумма перевозок в каждой строке $\sum x_{ij}$ должна быть равна запасам ai, а сумма перевозок в каждом столбце $\sum x_{ji}$ равна соответствующей заявке вj. Вариантов заполнения транспортной таблицы множество, поэтому искомым решением является то из допустимых решений, для которых общая стоимость перевозок будет минимальной.

Методы решения транспортной задачи.

Транспортная задача может быть решена симплекс методом. Однако специфическая форма системы ограничений позволяет упростить симплекс метод.
МЕТОД СЕВЕРО-ЗАПАДНОГО УГЛА. Заполнение клеток происходит последовательно по следующему алгоритму: сначала вывозится груз из пункта А1 и завозится в пункт В1, и этой перевозке х11 присваивается максимально возможное значение. Если заявка пункта В1 выполнена, а в пункте А1 еще остается груз, то он вывозится в пункт В2 и т.д. Если в пункте А1 недостаточно было груза для В1, то недостающий груз берется из А2 и т.д.

После того как спрос потребителя А1 удовлетворен, он выпадает из рассмотрения и т.д.

	B1	B2	B3	B4	*Запасы*
A1	**15** 5	**5** 7	6	8	***20***
A2	6	**25** 7	8	5	***25***
A3	5	**5** 4	**25** 6	7	***30***

A4	6	5	**10** 7	**5** 4	***15***
A5	5	6	6	**10** 6	***10***
Заявки	***15***	***35***	***35***	***15***	***100***

Стоимость перевозки: W=5*15+5*7+25*7+5*4+25*6+10*7+5*4+10*6=605

Существенным недостатком метода северо-западного угла является то, что он построен без учета стоимости перевозок.

МЕТОД МИНИМАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА. Заполнение клеток транспортной таблицы начинается с той клетки, в которой значение минимально. В нее записывается максимально возможное значение перевозки xij, которое может быть равно либо запасу ai, либо заявке вj. Если заявка вj выполнена полностью, то j-й столбец больше не рассматривается. Если не вывезенный груз еще остался, то он вывозится в пункт с наименьшим тарифом.

	B1	B2	B3	B4	*Запасы*
A1	**15** 5	7	**5** 6	8	***20***
A2	6	7	**25** 8	5	***25***
A3	5	**30** 4	6	7	***30***
A4	6	5	7	**15** 4	***15***
A5	5	**5** 6	**5** 6	6	***10***
Заявки	***15***	***35***	***35***	***15***	***100***

Стоимость перевозки: W = 30*4+5*6+15*4+15*5+5*6+25*8+5*6 = 545.

РАСПЕРЕДЕЛЕННЫЙ МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК. Для улучшения плана используют цикл транспортной таблицы. Цикл – это несколько клеток, соединенных замкнутой ломанной с прямыми углами.

Изобразим два цикла: A1B1, A1B2, A2B2, A2B1; A1B3,A1B4, A2B4, A2B6, A1B5, A4B5, A4B3.

поставщики	*потребители*	*B1*	*B2*	*B3*	*B4*	*B5*	*B_6*	*Мощность поставщиков*
A1		*C11*	*C12*	*C13*	*C14*	*C15*	*C16*	*a1*
A2		*C21*	*C22*	*C23*	*C24*	*C25*	*C26*	*a2*
A_3		*C31*	*C32*	*C33*	*C34*	*C35*	*C36*	*a3*
A4		*C41*	*C42*	*C43*	*C44*	*C45*	*C46*	*a4*
A_5		*C51*	*C52*	*C53*	*C54*	*C55*	*C56*	*a5*
Спрос потребителей		*b1*	*b2*	*в3*	*b4*	*в5*	*b6*	

Каждый цикл имеет четное число вершин и ребер, то есть в таблице в каждой строке или столбце может находтся только четное число клеток, содержащих вершины. Поэтому в клетках-вершинах можно менять значения петевозки так, что в сумма по строкам и столбцам не изменяется. Вершины цикла, в которых увеличиваем перевозки «+», а в которых уменьшаем перевозки «-». Величину изменения обозначим Δ, ее будем перемещать по циклу. Максимальное значение Δ, на которое можно уменьшить перевозку, определяется условием неотрицательности перевозок.

Цена цикла q – это изменение стоимости перевозок при перемещении Δ по циклу, которая равна разности между суммой стоимостей перевозок, соответствующих «+»-ым вершинам и суммой стоимостей «-» -ых вершин.

Q1= (c11+c22)-(c12+c21)

Q2 = (c13+c24+c16+c45)-(c14+c26+c15+c43)

При переносе по циклу к единиц груза, стоимость цикла и стоимость плана перевозок измениться на к единиц. Для улучшения плана перевозок нужно найти «-» цикл и переместить по нему максимально возможное количество груза, до тех пор пока таких циклов не останется. Количество груза, которое можно переместить определяется минимальным значением перевозок в «-» вершинах цикла.

Для решения транспортной задачи чаще всего применяется <u>метод потенциалов.</u> Пусть исходные данные задачи имеют вид

$A(a_1,a_2,a_3)=(40;45;70)$; $B(b_1,b_2,b_3)=(48;30;29;40)$;

$$C=\begin{matrix} 3 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 4 \end{matrix}$$

Общий объем производства $\Sigma a_i=40+45+70=155$ больше, чем требуется всем потребителям $\Sigma b_j=48+30+29+40=147$, т.е. имеем открытую модель транспортной задачи. Для превращения ее в закрытую вводим фиктивный пункт потребления с объемом потребления 155-147=8 единиц, причем тарифы на перевозку в этот пункт условимся считать равными нулю, помня, что переменные, добавляемые к левым частям неравенств для превращения их в уравнения, входят в функцию цели с нулевыми коэффициентами.

Первое базисное допустимое решение легко построить по правилу "северо-западного угла".

Таблица 1

Потребл / Произв	$b_1=48$	$b_2=30$	$b_3=29$	$b_4=40$	$b_5=8$	
$a_1=40$	**40** [3]	[6]	[4]	* [3]	[0]	$p_1=0$
$a_2=45$	**8** [2]	**30** [3]	**7** [1]	[3]	[0]	$p_2=-1$
$a_3=70$	[6]	[5]	**22** [1]	**40** [4]	**8** [0]	$p_3=-1$
	$q_1=3$	$q_2=4$	$q_3=2$	$q_4=5$	$q_5=1$	

Обозначим через $\mu(p_1, p_2,\ldots, p_m, q_1, q_2,\ldots, q_n)$ вектор симплексных множителей или потенциалов. Тогда $\Delta_{ij}=\mu A_{ij}-c_{ij}$, $i\in N_m, j\in N_n$, откуда следует

$$\Delta_{ij}=p_i+q_j-c_{ij} \ , \quad i\in N_m, j\in N_n$$

Положим, что $p_1=0$. Остальные потенциалы находим из условия, что для базисных клеток $\Delta_{ij}=0$. В данном случае получаем

$\Delta_{11}=0$, $p_1+q_1-c_{11}=0$, $0+q_1-3=0$, $q_1=3$

$\Delta_{21}=0$, $p_2+q_1-c_{21}=0$, $p_2+3-2=0$, $p_2= -1$

$\Delta_{23}=0$, $p_2+q_3-c_{23}=0$, $-1+q_3-1=0$, $q_3=2$

аналогично, получим: $q_2=4$, $p_3=-1$, $q_4=5$, $q_5=1$.

Затем вычисляем оценки всех свободных клеток:

$\Delta_{12}=p_1+q_2-c_{12}=0+4-6= -2$

$\Delta_{13}=p_1+q_3-c_{13}=0+2-4=-2$

$\Delta_{14}=2$; $\Delta_{15}=1$; $\Delta_{24}=1$; $\Delta_{25}=0$; $\Delta_{31}= -4$; $\Delta_{32}= -2$

Находим наибольшую положительную оценку:

$\max(\Delta_{ij} >0)=2=\Delta_{14}$,

Для найденной свободной клетки 14 строим цикл пересчета - замкнутую ломаную линию, соседние звенья которой взаимно перпендикулярны, сами звенья параллельны строкам и столбцам таблицы, одна из вершин находится в данной свободной клетке, а все остальные - в занятых клетках. Это будет 14-34-33-23-21-11. Производим перераспределение поставок вдоль цикла пересчета:

40			*
8	30	7	
		22	40

→

40-ρ			ρ
8+ρ		7-ρ	
		22+ρ	40-ρ

→

33			7
15	30		
		29	33

ρ_{max}=7

Получаем второе базисное допустимое решение:

Таблица 2

Потребл / Произв	b_1=48	b_2=30	b_3=29	b_4=40	b_5=8	
a_1=40	**33** ^{3}	^{6}	^{4}	**7** ^{3}	^{0}	p_1=0
a_2=45	**15** ^{2}	**30** ^{3}	^{1}	^{3}	^{0}	p_2=-1
a_3=70	^{6}	* ^{5}	**29** ^{1}	**33** ^{4}	**8** ^{0}	p_3=1
	q_1=3	q_2=4	q_3=0	q_4=3	q_5= -1	

Находим новые потенциалы. Новые оценки:

Δ_{12}= -2; Δ_{13}= -4; Δ_{15}= -1; Δ_{23}= -2; Δ_{24}= -1; Δ_{25}= -2; Δ_{31}= -2; Δ_{32}=0. Поскольку все $\Delta_{ij} \leq 0$ решение является оптимальным:

$$X_{opt1} = \begin{array}{cccc} 33 & 0 & 0 & 7 \\ 15 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 33 \end{array}$$

Однако, так как оценка клетки Δ_{32}=0, делаем вывод о наличие другого возможного оптимального решения. Для его нахождения строим цикл пересчета клетки 32: 32-22-21-11-14-34, производим перераспределение:

Таблица 3

Потребл / Произв	b_1=48	b_2=30	b_3=29	b_4=40	b_5=8	
a_1=40	**3** ^{3}	^{6}	^{4}	**37** ^{3}	^{0}	p_1=0
a_2=45	**45** ^{2}	^{3}	^{1}	^{3}	^{0}	p_2=-1
a_3=70	^{6}	**30** ^{5}	**29** ^{1}	**3** ^{4}	**8** ^{0}	p_3=1
	q_1=3	q_2=4	q_3=0	q_4=3	q_5= -1	

Находим новые потенциалы. Получаем p_i и q_j соответственно равные потенциалам первого базисного оптимального решения (см. табл. 2). Исходя из этого $\Delta_{max}=\Delta_{32}$, однако элемент с индексом 32 уже присутствует в базисе, поэтому пересчет не имеет смысла. Таким образом получаем второе и последнее базисное оптимальное решение:

$$X_{opt2} = \begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 37 \\ 45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 29 & 3 \end{array}$$